

BILLARES EN POLÍGONOS, SUPERFICIES PLANAS Y DINÁMICA EN ESPACIOS DE MÓDULOS

ANGEL PARDO

Requisitos. Conocimientos básicos de análisis y teoría de la medida. Conocimientos de sistemas dinámicos, teoría ergódica, geometría diferencial y geometría Riemanniana serán de utilidad.

Programa. *En una primera sesión introductoria se discutirá con los asistentes para, según sus conocimientos e intereses, redefinir el programa en caso de ser necesario.*

- Introducción

Billares en polígonos. Motivaciones de la física. Problema del triángulo. Problema del círculo de Gauss. Billares en polígonos y flujo geodésico en superficies planas. Billares en polígonos racionales y superficies de translación.

Familias de superficies de translación y espacio de módulos de diferenciales holomorfos en superficies de Riemann. Estratificación de los espacios de módulos; componentes conexas. Elemento de volumen. Acción de $SL(2, \mathbb{R})$ y flujo geodésico de Teichmüller. Ergodicidad. Criterio de Masur.

Subespacios y medidas afines; resultados de Eskin–Mirzakhani–Mohammadi. Problema de clasificación de subespacios invariantes.

- Exponentes de Lyapunov del fibrado de Hodge

Fibrado de Hodge. Conexión de Gauss–Manin. Cociclo de Kontsevich–Zorich. Teorema ergódico y teorema ergódico multiplicativo. Exponentes de Lyapunov. Fórmula de Kontsevich. Fenómeno de no-variación en superficies de bajo género.

Hiperbolicidad no uniforme. Simplicidad.

- Problema de conteo, constantes de Siegel–Veech

Trayectorias periódicas en billares racionales y geodésicas cerradas en superficies de translación. Problema de conteo. Resultados conocidos. Fórmula de Siegel–Veech.

Fórmula de Eskin–Kontsevich–Zorich. Fenómeno de no-variación en superficies hiperelípticas.

- Billares infinitos

Similitudes y diferencias. Billares periódicos. Escalera infinita y otros ejemplos.

Aplicaciones al modelo de “wind-tree”: Superficie de translación subyacente. Descomposición del fibrado de Hodge. Tasa de difusión y exponentes de Lyapunov.

Problema de conteo en el modelo de wind-tree: Fórmulas asintóticas en modelos genéricos. Término de error en modelos de tipo Veech. Fenómeno de no-variación en el caso clásico.

Referencias.

G. Forni, C. Matheus. *Introduction to Teichmüller theory and its applications to dynamics of interval exchange transformations, flows on surfaces and billiards*, J. Mod. Dyn. 8:3-4 (2014), pp. 271–436.

H. Masur, S. Tabachnikov. *Rational billiards and flat structures*, in Handbook on Dynamical Systems, Vol. 1A, Elsevier, Amsterdam (2002), pp. 1015–1090.

J. Smillie. *Dynamics of billiard flow in rational polygons*. In Dynamical Systems, ergodic theory and applications, Y. Sinai (ed). Encyclopedia of Math. Sciences 100. Math. Physics 1. Springer Verlag (2000), pp. 360–382.

S. Tabachnikov. *Billiards*, Panor. Synth. No. 1 (1995), vi+142 pp.

A. Wright. *Translation surfaces and their orbit closures: An introduction for a broad audience*, EMS Surv. Math. Sci. 2:1 (2015), pp. 63–108.

A. Zorich. *Flat surfaces*, “Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry I”, Springer, Berlin (2006), pp. 437–583.